

INTERNATIONAL ACADEMY OF
EDUCATION
INTERNATIONAL BUREAU OF
EDUCATION

IBE UNESCO
EDUCATIONAL PRACTICES SERIES
No 4, 2000

Improving student achievement in mathematics

by Douglas A. Grouws
and Kristin J. Cebulla

Translated in Greek (2007)
by
Olga Kassoti and Petros Kliapis

Authors of the Greek Maths textbook
“6th Grade Mathematics”

kassoti@sch.gr
kliapis@sch.gr

Βελτιώνοντας την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά

Douglas A. Grouws and Kristin J. Cebulla

Μετάφραση:

Όλγα Κασσώτη και Πέτρος Κλιάπης

*Εκπαιδευτικοί, Συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου
«Μαθηματικά Στ' Δημοτικού»*

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή	3
1 Ευκαιρίες για μάθηση	6
2 Έμφαση στο νόημα	9
3 Μάθηση νέων εννοιών και δεξιοτήτων κατά την επίλυση προβλημάτων	11
4 Ευκαιρίες για ανακαλύψεις και πρακτική εξάσκηση	13
5 Δεκτικότητα στις μεθόδους εύρεσης λύσεων από τους μαθητές και στην αλληλεπίδραση μεταξύ τους	15
6 Μάθηση σε μικρές ομάδες	17
7 Συζήτηση με ολόκληρη την τάξη	19
8 Αντίληψη του αριθμού	21
9 Χρήση εποπτικού υλικού	23
10 Η χρήση αριθμομηχανών από τους μαθητές	25
Συμπεράσματα	27
Άλλες πηγές	29
Βιβλιογραφία και αναφορές	32

Εισαγωγή

Αυτό το φυλλάδιο συνοψίζει το κεφάλαιο μαθηματικά από τη δεύτερη έκδοση του εγχειριδίου *Handbook of research on improving student achievement*, το οποίο εκδόθηκε από το Educational Research Service.

Το εγχειρίδιο βασίζεται στην ιδέα ότι για να πετύχουν οι προσπάθειες για καλύτερη διδασκαλία πρέπει να τις στηρίζουμε στην επιστημονική γνώση σχετικά με την αποτελεσματική διδασκαλία και τη μάθηση. Το εγχειρίδιο σχεδιάστηκε ειδικά για να βοηθήσει τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς να αντεπεξέλθουν με επιτυχία στον εξελισσόμενο εκπαιδευτικό τους ρόλο παρέχοντάς τους θεωρητικό και εφαρμοσμένο επιμορφωτικό υλικό από έρευνες σχετικά με την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση.

Οι διδακτικές πρακτικές που παρουσιάζονται σ' αυτό το φυλλάδιο απεικονίζουν ένα συνδυασμό από αναδυόμενες στρατηγικές και πρακτικές σε βάθος χρόνου. Οι συγγραφείς συνοψίζουν τις έρευνες που στηρίζουν κάθε διδακτική πρακτική, περιγράφουν πώς αυτές οι έρευνες μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη, κι απαριθμούν τις πιο σημαντικές μελέτες που στηρίζουν αυτή την πρακτική. Ένας πλήρης κατάλογος αναφορών παρουσιάζεται στο τέλος του φυλλαδίου για τους αναγνώστες που θέλουν να μελετήσουν και να καταλάβουν τις πρακτικές εκτενέστερα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα της έρευνας σε συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές παρουσιάζουν μόνο μικρά ή μέτρια οφέλη. Στην εκπαίδευση πρέπει να κατανοήσουμε, να επιλέξουμε προσεχτικά και να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς από διδακτικές πρακτικές οι οποίες από κοινού αυξάνουν την πιθανότητα να πετύχουμε καλύτερη μάθηση, γνωρίζοντας ότι αυτές οι πρακτικές μπορεί να μη λειτουργούν σε όλες τις τάξεις πάντα.

Όταν το σχολείο εφαρμόζει στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης αλλαγές οι οποίες επηρεάζουν την καθημερινή ζωή των μαθητών, έχει περισσότερες πιθανότητες να πετύχει καλύτερη μάθηση. Για παράδειγμα, αν ο στόχος είναι να βελτιωθούν οι δεξιότητες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, το σχολείο μπορεί να προγραμματίσει επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη χρήση: 1) της μεθόδου «μάθηση σε κύκλους» (learning cycle approach), 2) των προσομοιώσεων σε υπολογιστή, 3) της συστημικής προσέγγισης στην επίλυση προβλήματος. Το να προγραμματίσουμε ταυτόχρονα την επιμόρφωση και τις άλλες παροχές που χρειάζονται για να στηριχτούν αυτές οι αλλαγές δεν είναι μικρό έργο, είναι όμως ένα έργο που θα βελτιώσει τις δεξιότητες επίλυσης προβλήματος στους μαθητές. Τα ερευνητικά ευρήματα τα οποία παρουσιάζονται σε αυτό το φυλλάδιο αποτελούν την αφετηρία για την ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου σχεδίου προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Οι εκπαιδευτικοί και τα στελέχη εκπαίδευσης χρειάζονται οπωσδήποτε χρόνο για περαιτέρω μελέτη, συζήτηση και αναζήτηση σχετικά με το τι συνεπάγεται μια συγκεκριμένη πρακτική πριν αποφασίσουν να την συμπεριλάβουν στο πρόγραμμα του σχολείου τους.

Πρέπει ωστόσο, να αναγνωρίσουμε την πολυπλοκότητα που συνεπάγεται η εφαρμογή της επιστημονικής γνώσης σχετικά με τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Όπως γράφει ο Dennis Sparks στο *Handbook of research on improving student achievement* τα σχολεία και οι εκπαιδευτικές περιφέρειες έχουν την ευθύνη να καλλιεργήσουν ένα πνεύμα σύμφωνα με το οποίο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ασκήσουν τα επαγγελματικά τους καθήκοντα, να ανακαλύπτουν νέες διδακτικές πρακτικές και να ανταλλάσσουν πληροφορίες μεταξύ τους κρατώντας την προσοχή τους στραμμένη στον

απόλυτο στόχο της επαγγελματικής τους καταξίωσης – τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών τους.

Βελτίωση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών

Ο αριθμός των ερευνητικών εργασιών που έγιναν για τα μαθηματικά τα τελευταία τριάντα χρόνια έχει αυξηθεί εντυπωσιακά (Kilpatrick, 1992). Το αντικείμενο των ερευνών αυτών αφορά ένα ευρύ πεδίο όσον αφορά τα περιεχόμενα, τις εκπαιδευτικές βαθμίδες και τις ερευνητικές μεθοδολογίες. Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών μαζί με σχετικά ευρήματα ερευνών από άλλες περιοχές, όπως η γνωστική ψυχολογία, χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τις επιτυχημένες πρακτικές και στρατηγικές διδασκαλίας.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών είναι περίπλοκες διαδικασίες. Είναι δύσκολο να διακρίνουμε την επίδραση που έχει η αλλαγή μιας διδακτικής πρακτικής στη διαδικασία μάθησης, εξαιτίας της επίδρασης που ασκούν ταυτόχρονα άλλες διδακτικές δραστηριότητες και το πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διαδικασία μάθησης.

Γι' αυτό το λόγο, καθώς οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας τους, αλλάζοντας τις διδακτικές τους πρακτικές, πρέπει να λάβουν σοβαρά υπόψη τους το πλαίσιο διδασκαλίας και ιδιαίτερα τους μαθητές στους οποίους απευθύνονται. Ακόμη, δεν πρέπει να κρίνουν τα αποτελέσματα των νέων πρακτικών τους πολύ γρήγορα. Κρίσεις σχετικά με την καταλληλότητα των αποφάσεων τους πρέπει να στηρίζονται σε περισσότερα από ένα αποτελέσματα. Αν τα αποτελέσματα δεν είναι απολύτως ικανοποιητικά, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξετάσουν τις περιστάσεις οι οποίες ίσως ελαχιστοποιούν την επίδραση των διδακτικών πρακτικών τις οποίες εφαρμόζουν. Για παράδειγμα, η αξία ενός εκπαιδευτικού ο οποίος δίνει έμφαση στην διδασκαλία εννοιών, μπορεί να μην φανεί, αν η αξιολόγηση των μαθητών επικεντρώνεται στην ανάκληση κανόνων οι οποίοι κατακτήθηκαν με μηχανική αποστήθιση και στην εξέταση μεμονωμένων δεξιοτήτων.

Ο τρόπος εφαρμογής μιας διδακτικής πρακτικής έχει επίσης μεγάλη επίδραση στη μάθηση των μαθητών. Για παράδειγμα, η αξία της χρήσης εποπτικού υλικού στη διερεύνηση μιας έννοιας εξαρτάται όχι μόνο από το *αν* χρησιμοποιείται εποπτικό υλικό, αλλά επίσης από το *πώς* το υλικό αυτό χρησιμοποιείται από τους μαθητές. Παρομοίως, η διδασκαλία σε μικρές ομάδες θα ωφελήσει τους μαθητές μόνο αν ο εκπαιδευτικός ξέρει τότε και *πώς* να χρησιμοποιεί αυτή τη διδακτική πρακτική. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός, καθώς εφαρμόζει οποιαδήποτε από τις παραπάνω προτάσεις, να ελέγχει συνεχώς και να προσαρμόζει τον τρόπο εφαρμογής της διδακτικής πρακτικής, ώστε να βελτιστοποιήσει την ποιότητα της διδασκαλίας του.

Παρά τις παραπάνω επιφυλάξεις, τα ερευνητικά ευρήματα δείχνουν ότι συγκεκριμένες διδακτικές στρατηγικές και μέθοδοι αξίζει να εξεταστούν προσεκτικά, δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να βελτιώσουν τις πρακτικές διδασκαλίας τους στα μαθηματικά. Καθώς οι αναγνώστες θα εξετάσουν τις προτάσεις που ακολουθούν, θα διαπιστώσουν ότι πολλές από τις πρακτικές είναι αλληλένδετες. Υπάρχει επίσης ένας σημαντικός αριθμός από αυτές τις πρακτικές που αποδείχτηκαν αποτελεσματικές και γι' αυτό το λόγο οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίσουν τις ιδέες που θα ήθελαν να δοκιμάσουν στην τάξη τους. Οι πρακτικές δεν μπορεί να υπάρξουν αυτοδύναμα, στην πραγματικότητα τείνουν να συμπληρώνουν η μία την άλλη. Η

λογική συνάφεια μεταξύ τους και το πλήθος προτάσεων από τις έρευνες τις καθιστά ταυτόχρονα ενδιαφέρουσες και εφαρμόσιμες.

Οι συγγραφείς θέλουν να ευχαριστήσουν τους πιο κάτω συναδέλφους που έκαναν βοηθητικές υποδείξεις: Tom Cooney, Professor of Mathematics, University of Georgia; James Hiebert, Professor of Mathematics Education, University of Delaware; Judy Sowder, Professor of Mathematics, San Diego State University; and Terry Wood, Professor of Mathematics Education, Purdue University.

1. Ευκαιρίες για μάθηση

Οι ευκαιρίες για μάθηση στα μαθηματικά σχετίζονται άμεσα και εξαρτώνται από την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Ερευνητικά δεδομένα

Ο όρος «ευκαιρίες για μάθηση» (EγM) (opportunity to learn) αναφέρεται στο περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Ειδικότερα για τα μαθηματικά οι EγM περιλαμβάνουν το περιεχόμενο των μαθηματικών το οποίο παρουσιάζεται, τον τρόπο διδασκαλίας και τη σχέση ανάμεσα στις ήδη κατακτημένες δεξιότητες των μαθητών και τη νέα έννοια.

Η ισχυρή σχέση ανάμεσα στις EγM και την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά έχει τεκμηριωθεί από πολλές έρευνες. Το θέμα αυτό μελετήθηκε στο **First International Mathematics Study** (Husen) όπου ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν το βαθμό στον οποίο οι μαθητές εκτέθηκαν σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και τις δεξιότητες που απέκτησαν. Βρέθηκε ισχυρή σχέση ανάμεσα στο βαθμό των EγM και στο μέσο όρο του βαθμού της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά, με τον υψηλό βαθμό στις EγM να σχετίζεται με υψηλό βαθμό στην επίδοση. Η σχέση ανάμεσα στην επίδοση στα μαθηματικά και στις ευκαιρίες για μάθηση επίσης παρατηρήθηκε σε άλλες διεθνείς έρευνες όπως **The Second International Mathematics Study** (McKnight et al.) και **The Third International Mathematics and Science Study** (TIMSS) (Schmidt, McKnight & Raizen).

Όπως θα ήταν αναμενόμενο, υπάρχει επίσης θετική σχέση μεταξύ του συνολικού χρόνου που διατίθεται στα μαθηματικά και της μαθηματικής επίδοσης γενικά. Οι Suarez et al., σε μια ανασκόπηση ερευνών σχετικά με το χρόνο διδασκαλίας, βρήκαν πως υπάρχει σχέση μεταξύ του χρόνου που διατίθεται για διδασκαλία και της επίδοσης των μαθητών. Σε διεθνές επίπεδο, ο Keeves βρήκε σημαντική σχέση σε πολλές πολιτείες της Αυστραλίας μεταξύ της επίδοσης στα μαθηματικά και του συνολικού χρόνου που διατέθηκε από το αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία τους.

Παρά τα ευρήματα αυτών των ερευνών, πολλοί μαθητές ακόμη και σήμερα, περνούν ελάχιστο χρόνο κάνοντας μαθηματικά. Για παράδειγμα οι Grouws και Smith στην ανάλυση των δεδομένων από το **The 1996 National Assessment of Educational Progress** (NAEP) mathematics study, βρήκαν ότι το 20% των μαθητών της 8ης τάξης έκαναν μαθηματικά 30 λεπτά ή λιγότερο κάθε μέρα.

Η έρευνα έδειξε επίσης και μια ισχυρή σχέση ανάμεσα στην επιλογή των Μαθηματικών ως προαιρετικό μάθημα από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και στην επίδοσή τους. Αναφορές από το National Assessment of Educational Progress (NAEP) στα μαθηματικά έδειξαν ότι ο αριθμός των μαθημάτων επιλογής «μαθηματικά προχωρημένου επιπέδου» που επέλεξαν οι μαθητές ήταν ο πιο ισχυρός δείκτης για την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά μετά τις προσαρμογές που έγιναν για τις διαφορές που υπήρχαν στο οικογενειακό τους περιβάλλον.

Τα εγχειρίδια σχετίζονται επίσης με τις EγM, επειδή πολλά από αυτά δεν περιέχουν μεγάλη ποσότητα νέας ύλης για τους μαθητές. Σε πολλά σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζεται έλλειψη εστίασης στη νέα ύλη και υπερβολική έμφαση στην επανάληψη. Ο Flanders εξέτασε πολλά σχολικά εγχειρίδια για τις τάξεις δευτέρα ως όγδοη και διαπίστωσε ότι λιγότερο από το 50% των

σελίδων τους περιείχε υλικό νέο για τους μαθητές. Οι Kulm, Morris και Grier σε μια ανασκόπηση δώδεκα εγχειριδίων μαθηματικών Γυμνασίου διαπίστωσαν ότι, τα πιο παραδοσιακά από τα εγχειρίδια αυτά, δεν ακολουθούν τις σχετικές με το περιεχόμενο οδηγίες οι οποίες δίνονται από τα πρόσφατα Mathematics Standards Documents.

Αμερικανικά δεδομένα από το TIMSS δείχνουν σημαντικές διαφορές στην ύλη που διδάχτηκε σε μαθητές διαφορετικών τάξεων ή δεσμών. Για παράδειγμα, οι μαθητές σε τάξεις ενισχυτικής διδασκαλίας, σε κανονικές τάξεις και σε τάξεις προ-άλγεβρας διδάχτηκαν διαφορετική ύλη στα μαθηματικά και οι επιδόσεις τους διαφοροποιήθηκαν ανάλογα. Τα τεστ επίδοσης που χρησιμοποιήθηκαν σε διεθνείς μελέτες και στην αξιολόγηση NAEP μετρούν τα σημαντικά μαθηματικά αποτελέσματα έχοντας καλύψει από κοινού ένα ευρύ φάσμα στα μαθηματικά. Επιπλέον τα τεστ επίδοσης έχουν γενικά χρησιμοποιηθεί για να αξιολογήσουν τις γνώσεις και τις αδυναμίες ακόμη και των ικανότερων μαθητών. Σαν συνέπεια παρέχουν αξιόλογες μετρήσεις αποτελεσμάτων για την έρευνα η οποία εξετάζει την σημασία των ΕγΜ σαν παράγοντα της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά.

Μέσα στην τάξη

Τα ευρήματα που αφορούν τη σχέση ανάμεσα στις ΕγΜ και την επίδοση των μαθητών έχουν επιπτώσεις και για τους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, φαίνεται λογικό να διαθέτουν αρκετό χρόνο για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε κάθε τάξη. Θα πρέπει να μας απασχολήσουν σοβαρά οι μικρές χρονικές περίοδοι, οι οποίες αφιερώνονται για τη διδασκαλία των μαθηματικών, άσχετα αν επιβάλλονται για πρακτικούς ή φιλοσοφικούς λόγους. Αποτελεί σοβαρό θέμα η 30λεπτη ή 35λεπτη περίοδος για τη διδασκαλία των μαθηματικών η οποία εφαρμόζεται σε κάποια σχολεία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Σειρές σχολικών εγχειριδίων τα οποία σε κάθε χρονιά δίνουν έμφαση στην επανάληψη και ασχολούνται ελάχιστα με την παρουσίαση νέας ύλης πρέπει να αποφεύγονται, ή η χρήση τους θα πρέπει να συμπληρώνεται με κατάλληλους τρόπους. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο ως ένα επιπλέον διδακτικό εργαλείο ανάμεσα σε πολλά άλλα, παρά να αισθάνονται υποχρεωμένοι να το ακολουθήσουν αυστηρά σε μια διαδικασία διδασκαλίας ενός μαθήματος την ημέρα.

Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διασφαλίσουν ότι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να καλλιεργήσουν σημαντικές γνώσεις και δεξιότητες. Αν οι μαθητές θα πρέπει να ανταγωνιστούν αποτελεσματικά σε ένα τεχνολογικά προσανατολισμένο παγκόσμιο περιβάλλον, πρέπει να διδαχθούν τις μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται για το περιβάλλον αυτό. Έτσι, αν η δεξιότητα επίλυσης προβλήματος είναι σημαντική, πρέπει να δοθεί προσοχή και έμφαση σε αυτό σε καθημερινή και συνεχή βάση. Αν θέλουμε οι μαθητές μας να αναπτύξουν την αντίληψη του αριθμού, είναι σημαντικό να ασχοληθούν με νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις ως μέρος του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών. Αν η αναλογική σκέψη και ο παραγωγικός συλλογισμός είναι σημαντικά, θα πρέπει να δοθεί έμφαση σε αυτά στο αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο εφαρμόζεται στην τάξη.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι ΕγΜ σχετίζονται με θέματα ισότητας. Κάποιες εκπαιδευτικές πρακτικές επιδρούν διαφορετικά στις ΕγΜ συγκεκριμένων μαθητικών ομάδων. Για παράδειγμα, μια πρόσφατη έρευνα της Αμερικανικής Ένωσης Πανεπιστημιακών Γυναικών (American Association of University Women) έδειξε ότι η χρήση της τεχνολογίας ανάμεσα στα αγόρια και στα κορίτσια διαφέρει σημαντικά. Τα

κορίτσια δεν επιλέγουν τα μαθήματα «πληροφορική» και «σχεδιασμός με τη βοήθεια υπολογιστή» όσο τα αγόρια. Επιπλέον τα αγόρια συχνά χρησιμοποιούν υπολογιστές για προγραμματισμό και για επίλυση προβλημάτων, όταν τα κορίτσια τείνουν να χρησιμοποιούν τον υπολογιστή κατά βάση σαν επεξεργαστή κειμένου. Αυτό υποδεικνύει ότι, αφού η τεχνολογία χρησιμοποιείται στην τάξη των μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αναθέτουν δραστηριότητες και υπευθυνότητες σε μαθητές με τέτοιο τρόπο, ώστε τόσο τα αγόρια όσο και τα κορίτσια να αποκτήσουν με την ενεργή συμμετοχή τους εμπειρίες μάθησης με τα τεχνολογικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται.

Οι ΕγΜ επηρεάζονται ακόμα, όταν μαθητές χαμηλής επίδοσης κατευθύνονται σε προγράμματα «βασικών δεξιοτήτων» (basic skills) τα οποία είναι προσανατολισμένα προς την ανάπτυξη διαδικαστικών δεξιοτήτων και παρέχουν ελάχιστες ευκαιρίες για καλλιέργεια των ικανοτήτων για επίλυση προβλήματος και για σκέψη σε υψηλότερο επίπεδο. Αυτό το φτωχό αναλυτικό πρόγραμμα που δίνεται σε αυτούς τους μαθητές αποτελεί ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα, καθώς οι ιδέες και οι έννοιες στις οποίες συχνά δεν δίνεται έμφαση ή που δεν διδάσκονται, είναι αυτές που απαιτείται να έχουμε στην καθημερινή ζωή και στην εργασία μας.

Βιβλιογραφία: American Association of University Women, 1998; Atanda, 1999; Flanders, 1987; Grouws & Smith, in press; Hawkins, Stancavage & Dossey, 1998; Husen, 1967; Keeves, 1976, 1994; Kulm, Morris & Grier, 1999; McKnight et al., 1987; Mullis, Jenkins & Johnson, 1994; National Center for Education Statistics, 1996, 1997, 1998; Schmidt, McKnight & Raizen, 1997; Secada, 1992; Suarez et al., 1991.

2. Έμφαση στο νόημα

Η επικέντρωση της διδασκαλίας στην ανάπτυξη του νοήματος σημαντικών μαθηματικών εννοιών βελτιώνει το επίπεδο της μάθησης στους μαθητές.

Ερευνητικά δεδομένα

Υπάρχει μακρά ιστορία ερευνών η οποία ξεκινάει από το 1940 και την εργασία του William Brownell, σχετικά με τα αποτελέσματα της διδασκαλίας του νοήματος και της κατανόησης στα μαθηματικά. Οι έρευνες έχουν δείξει ότι η έμφαση στη διδασκαλία του νοήματος έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών, δηλαδή βαθύτερη κατανόηση, μονιμότερη γνώση και αύξηση της πιθανότητας να χρησιμοποιηθούν οι έννοιες σε νέες καταστάσεις. Σχετικά αποτελέσματα βρέθηκαν επίσης σε μελέτες οι οποίες έγιναν σε υποβαθμισμένες περιοχές.

Μέσα στην τάξη

Όπως είναι αναμενόμενο, η έννοια «διδασκαλία του νοήματος» (teaching for meaning) ποικίλλει από έρευνα σε έρευνα, και έχει εξελιχθεί με το πέρασμα του χρόνου. Οι εκπαιδευτικοί ενδιαφέρονται να εξετάσουν πώς διάφορες ερμηνείες αυτής της έννοιας μπορούν να ενσωματωθούν στη διδακτική τους πρακτική.

- ***Δώστε έμφαση στο μαθηματικό νόημα των εννοιών, συμπεριλαμβάνοντας το πως η ιδέα, η έννοια ή η δεξιότητα συνδέεται ποικιλοτρόπως με άλλες μαθηματικές έννοιες κατά τρόπο λογικό και κατανοητό.*** Έτσι, για την αφαίρεση, δώστε έμφαση στην αντίστροφη πράξη ή «σχέση αναίρεσης» μεταξύ της αφαίρεσης και της πρόσθεσης. Γενικά, η έμφαση στο νόημα ήταν κάτι συνηθισμένο στις σχετικές έρευνες της δεκαετίας του 30. Στόχος ήταν να μετατοπιστεί η έμφαση της διδασκαλίας από την καθαρά θεωρητική μαθηματική σημασία των εννοιών και να δοθεί μεγάλη έμφαση προς ένα προσανατολισμό σε θέματα της κοινωνικής χρησιμότητας των μαθηματικών και της χρήσης τους στην καθημερινή ζωή.
- ***Δημιουργήστε ένα μαθησιακό περιβάλλον στην τάξη στο οποίο οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν έννοιες.*** Οι μαθητές μπορούν να μάθουν σημαντικές μαθηματικές έννοιες τόσο μέσα από πλαίσια που σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όσο και σε πλαίσια καθαρά αφαιρετικά. Το επίπεδο αφαίρεσης σε ένα μαθησιακό περιβάλλον και ο τρόπος που σχετίζεται με τους μαθητές, πρέπει να επιλέγεται με σύνεση, να προσαρμόζεται προσεχτικά και να παρακολουθείται από κοντά. Πρέπει να ληφθεί πρόνοια για το υπόβαθρο και για τα ενδιαφέροντα των μαθητών. Οι μαθηματικές έννοιες που περιλαμβάνονται στη διδασκαλία θα πρέπει να φαίνονται χρήσιμες στους μαθητές και να έχουν νόημα για αυτούς. Ένας σημαντικός παράγοντας στη διδασκαλία των εννοιών με έμφαση στο νόημα είναι να συνδέονται οι νέες έννοιες και δεξιότητες με τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών.
- ***Κάνετε σαφείς τις συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων μαθημάτων.*** Για παράδειγμα, η διδασκαλία θα μπορούσε να συνδέσει τις δεξιότητες συλλογής και απεικόνισης δεδομένων με τις σφυγμομετρήσεις της κοινής γνώμης στο μάθημα της κοινωνικής και πολιτικής αγωγής. Ή θα μπορούσε να συνδέσει τη μαθηματική

έννοια της άμεσης μεταβολής με την έννοια της δύναμης στη φυσική βοηθώντας να αποκτήσουν οι μαθητές μια αναφορά αυτής της έννοιας με πραγματικά δεδομένα.

- ***Δώστε τη δέουσα σημασία στα νοήματα που εκφράζουν οι μαθητές και στο τι καταλαβαίνουν στη διάρκεια της διδασκαλίας.*** Οι αντιλήψεις των μαθητών για την ίδια έννοια θα ποικίλουν όπως θα ποικίλουν οι μέθοδοι και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Οι εκπαιδευτικοί, κατά το σχεδιασμό και εφαρμογή της διδασκαλίας, θα πρέπει να επενδύσουν στην κατανόηση της διαισθητικής αντίληψης και της μεθοδολογίας των μαθητών.

Βιβλιογραφία: Aubrey, 1997; Brownell, 1945, 1947; Carpenter et al., 1998; Cobb et al., 1991; Fuson, 1992; Good, Grouws & Ebmeier, 1983; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Wearne, 1996; Hiebert et al., 1997; Kamii, 1985, 1989, 1994; Knapp, Shields & Turnbull, 1995; Koehler & Grouws, 1992; Skemp, 1978; Van Engen, 1949; Wood & Sellers, 1996, 1997.

3. Μάθηση νέων εννοιών και δεξιοτήτων κατά την επίλυση προβλημάτων

Οι μαθητές μπορούν να μάθουν νέες έννοιες και δεξιότητες λύνοντας προβλήματα.

Ερευνητικά δεδομένα

Η έρευνα υπογραμμίζει ότι οι μαθητές που αναπτύσσουν εννοιολογική κατανόηση νωρίς, έχουν καλύτερες επιδόσεις στη διαδικαστική γνώση αργότερα. Μαθητές με καλή εννοιολογική κατανόηση είναι ικανοί να εκτελούν με επιτυχία παρεμφερείς δραστηριότητες και να αναπτύσσουν διαδικασίες και δεξιότητες τις οποίες δεν έχουν διδαχτεί. Μαθητές χωρίς εννοιολογική κατανόηση μπορούν να αποκτήσουν διαδικαστική γνώση με τη διδασκαλία κατάλληλων δεξιοτήτων, ενώ, όπως δείχνουν οι έρευνες, μαθητές με χαμηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης, αποκτούν διαδικαστική γνώση απλά με περισσότερη πρακτική εξάσκηση.

Έρευνες που έγιναν από την Heid δείχνουν ότι οι μαθητές είναι ικανοί να αντιλαμβάνονται έννοιες χωρίς προηγούμενη ή ταυτόχρονη ανάπτυξη δεξιοτήτων. Στην έρευνά της με μαθητές, η διδασκαλία επικεντρώθηκε σχεδόν αποκλειστικά στην εννοιολογική κατανόηση, ενώ οι δεξιότητες διδάχτηκαν εν συντομία στο τέλος μιας σειράς μαθημάτων. Οι μαθητές που συμμετείχαν στα προγράμματα με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, απέδωσαν το ίδιο καλά σε διαδικαστικές δεξιότητες, με τους μαθητές που διδάχτηκαν με παραδοσιακές μεθόδους, τους ξεπέρασαν σημαντικά όμως στην κατανόηση εννοιών.

Η Mack κατέδειξε ότι η μηχανιστική (συνήθως λανθασμένη) γνώση των μαθητών για τα κλάσματα συχνά συγκρούεται με την άτυπη (συνήθως σωστή) γνώση τους γι' αυτά. Η ερευνήτρια χρησιμοποίησε την άτυπη γνώση των μαθητών για να τους βοηθήσει να αντιληφθούν σύμβολα για κλάσματα και να αναπτύξουν αλγόριθμους για τις πράξεις. Η έρευνα της Fawcett με μαθητές που διδάσκονταν γεωμετρία έδειξε ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν βασικές έννοιες, δεξιότητες και τη δομή της γεωμετρίας μέσα από επίλυση προβλημάτων.

Μέσα στην τάξη

Έχει αποδειχτεί ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν καινούργιες δεξιότητες και έννοιες προσπαθώντας να βρουν λύσεις σε προβλήματα. Για παράδειγμα εξοπλισμένοι μόνο με τη γνώση της βασικής πρόσθεσης, οι μαθητές μπορούν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους αναπτύσσοντας άτυπους αλγόριθμους για την πρόσθεση μεγάλων αριθμών. Παρομοίως, λύνοντας προσεχτικά επιλεγμένα πρωτότυπα προβλήματα, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν κατανόηση για πολλές σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως οι πρώτοι αριθμοί και η σχέση περιμέτρου και εμβαδού.

Οι πιο περίπλοκες μαθηματικές δεξιότητες μπορούν επίσης να αναπτυχθούν μέσω της προσέγγισής τους ως πρόβλημα που καλούνται οι μαθητές να λύσουν. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν την άτυπη και διαισθητική γνώση των μαθητών σε άλλες περιοχές για να αναπτύξουν άλλες χρήσιμες διαδικασίες. Η διδασκαλία μπορεί να ξεκινά με ένα παράδειγμα για το οποίο οι μαθητές διαισθητικά γνωρίζουν την απάντηση. Πέρα

από το σημείο αυτό, οι μαθητές αφήνονται να εξερευνήσουν και να αναπτύξουν τους δικούς τους αλγόριθμους. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι μαθητές καταλαβαίνουν ότι ξεκινώντας με 4 πίτσες και στη συνέχεια τρώγοντας το μισό μιας πίτσας θα μας απομείνουν 3 και $1/2$ πίτσες. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτή τη γνώση για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόηση της αφαίρεσης στα κλάσματα.

Η έρευνα καταδεικνύει ότι δεν είναι απαραίτητο για τους εκπαιδευτικούς να εστιάσουν πρώτα στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην επίλυση προβλημάτων. Μπορεί να γίνουν ταυτόχρονα και τα δύο. Οι δεξιότητες μπορούν να αναπτύσσονται στην πορεία όταν χρειάζεται, ή η ανάπτυξη τους μπορεί να συμπληρωθεί με τη χρήση της τεχνολογίας. Στην πραγματικότητα έχει αποδειχθεί ότι, αν οι μαθητές ασκηθούν αρχικά πάρα πολύ σε μεμονωμένες δραστηριότητες, δυσκολεύονται περισσότερο να τις κατανοήσουν αργότερα.

Βιβλιογραφία: Cognition and Technology Group, 1997; Fawcett, 1938; Heid, 1988; Hiebert & Wearne, 1996; Mack, 1990; Resnick & Omanson, 1987; Wearne & Hiebert, 1988.

4. Ευκαιρίες για ανακαλύψεις και πρακτική εξάσκηση

Δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να ανακαλύψουν τη νέα γνώση και να εφαρμόσουν ό,τι έμαθαν βελτιώνει την επίδοσή τους.

Ερευνητικά δεδομένα

Δεδομένα από την έρευνα *TIMSS video study* έδειξαν ότι περισσότερο από το 90% του χρόνου που διατίθεται για τα μαθηματικά στην 8^η τάξη στις ΗΠΑ αφιερώνεται στην πρακτική εξάσκηση σε διαδικασίες ρουτίνας, με το υπόλοιπο του χρόνου να αφιερώνεται γενικά στην εφαρμογή των διαδικασιών σε καινούργιες καταστάσεις. Στην ουσία δεν αφιερώνεται καθόλου χρόνος στην ανακάλυψη νέων διαδικασιών και στην ανάλυση καταστάσεων με τις οποίες οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι. Αντίθετα μαθητές της ίδιας τάξης σε ένα τυπικό γιαπωνέζικο σχολείο αφιερώνουν περίπου 40% του μαθήματος στην εξάσκηση διαδικασιών ρουτίνας, 15% εφαρμόζοντας τις διαδικασίες σε νέες καταστάσεις και 45% ανακαλύπτοντας καινούργιες διαδικασίες και αναλύοντας καινούργιες καταστάσεις.

Ερευνητικά δεδομένα υποδηλώνουν ότι οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες και για ανακάλυψη και για εξάσκηση. Τα δεδομένα από αρκετές ερευνητικές μελέτες δείχνουν ότι όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν τις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες, αποκτούν μια ισχυρότερη εννοιολογική κατανόηση των συνδέσεων ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες.

Πολλά επιτυχημένα μεταρρυθμιστικά προγράμματα περιλαμβάνουν χρόνο ώστε οι μαθητές να ασκηθούν σε αυτά που ανακάλυψαν και έμαθαν. Οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες να εφαρμόσουν αυτά που μαθαίνουν και να εξασκήσουν τις δεξιότητες στις οποίες θα αξιολογηθούν. Για παράδειγμα αν θέλουν οι εκπαιδευτικοί να γίνουν οι μαθητές επαρκείς στην επίλυση προβλημάτων, θα πρέπει να τους δώσουν την ευκαιρία να ασκηθούν στην επίλυση προβλημάτων. Αν ο στόχος είναι η ενδυνάμωση του παραγωγικού συλλογισμού, η εργασία των μαθητών θα πρέπει να περιέχει δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν τέτοιο συλλογισμό. Και, φυσικά, αν η επάρκεια σε διαδικασίες είναι το ζητούμενο, το αναλυτικό πρόγραμμα πρέπει να δίνει έμφαση σε τέτοιες διαδικασίες.

Μέσα στην τάξη

Είναι ξεκάθαρο ότι απαιτείται μια ισορροπία ανάμεσα στο χρόνο που ξοδεύουν οι μαθητές κάνοντας πρακτική εξάσκηση σε καθημερινές διαδικασίες και στο χρόνο που αφιερώνουν σε ανακάλυψη νέων ιδεών. Οι εκπαιδευτικοί δεν χρειάζεται να επιλέξουν ανάμεσα σε αυτές τις δραστηριότητες, για την ακρίβεια δεν χρειάζεται να κάνουν καμιά επιλογή αν οι μαθητές πρόκειται να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη που χρειάζονται. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να προσπαθήσουν να εξασφαλίσουν ότι και τα δυο είδη δραστηριοτήτων συνυπάρχουν σε σωστή αναλογία και με τον κατάλληλο τρόπο. Η έρευνα που αναφέρθηκε παραπάνω, υποδεικνύει ότι προς το παρόν δεν τηρείται η ισορροπία στην έμφαση που δίνεται σ' αυτά τα δυο είδη δραστηριοτήτων και πολύ συχνά δίνεται υπερβολική έμφαση σε εργασίες για ανάπτυξη δεξιοτήτων, ενώ δίνονται λίγες ευκαιρίες στους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες ανακάλυψης οι οποίες να έχουν νόημα γι αυτούς.

Για να αυξήσουν τις πιθανότητες για ανακαλυπτική μάθηση, οι εκπαιδευτικοί πρέπει συχνά να χρησιμοποιούν πρωτότυπα προβλήματα και περιοδικά να παρουσιάζουν ένα μάθημα το οποίο εμπεριέχει μια νέα δεξιότητα, την οποία όμως να θέτει ως πρόβλημα προς επίλυση και να επιτρέπει στους μαθητές να δομήσουν νέα γνώση που στηρίζεται στη διαισθητική τους γνώση και στις άτυπες διαδικασίες.

Βιβλιογραφία: Boaler, 1998; Brownell, 1945, 1947; Carpenter et al., 1998; Cobb et al., 1991; Cognition and Technology Group, 1997; Resnick, 1980; Stigler & Hiebert, 1997; Wood & Sellers, 1996, 1997.

5. Δεκτικότητα στις μεθόδους εύρεσης λύσεων από τους μαθητές και στην αλληλεπίδραση μεταξύ τους

Η διδασκαλία η οποία ενσωματώνει τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την εύρεση διαισθητικών λύσεων μπορεί να βελτιώσει τη μάθηση τους, ειδικά όταν συνδυάζεται με ευκαιρίες για συζήτηση και αλληλεπίδραση μεταξύ τους.

Ερευνητικά δεδομένα

Πρόσφατα δεδομένα από την έρευνα *TIMSS video study* έδειξαν ότι στις ιαπωνικές τάξεις χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό στη διδασκαλία τις μεθόδους εύρεσης λύσης από τους μαθητές. Παρομοίως, η ίδια τεχνική διδασκαλίας εμφανίζεται σε πολλά επιτυχημένα ερευνητικά προγράμματα στις ΗΠΑ. Τα ευρήματα από τις αμερικανικές έρευνες δείχνουν καθαρά δυο σημαντικές αρχές οι οποίες σχετίζονται με την ανάπτυξη της βαθιάς εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών στα μαθηματικά.

Πρώτον, η επιτυχία των μαθητών και η κατανόηση βελτιώνονται σημαντικά όταν οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες οι μαθητές δομούν τη γνώση, επίσης όταν οι εκπαιδευτικοί είναι εξοικειωμένοι με τις μεθόδους διαισθητικής λύσης που χρησιμοποιούν οι μαθητές καθώς λύνουν προβλήματα, και όταν χρησιμοποιούν αυτές τις γνώσεις τους στο σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδασκαλίας τους στα μαθηματικά. Αυτά τα αποτελέσματα φάνηκαν ξεκάθαρα στις έρευνες στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και αρχίζουν να φαίνονται στις αντίστοιχες έρευνες σε υψηλότερες βαθμίδες.

Δεύτερον, σχεδιάζοντας τη διδασκαλία μας γύρω από προσεχτικά επιλεγμένα προβλήματα, τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά τη διαδικασία επίλυσης και στη συνέχεια τους δίνουν την ευκαιρία να ανταλλάξουν τις μεθόδους επίλυσης, έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της επίδοσης τους στη λύση προβλημάτων. Είναι σημαντικό πως αυτό το «όφελος» επιτεύχθηκε χωρίς να ανιχνευθεί απώλεια στις επιδόσεις των μαθητών στις δεξιότητες και έννοιες που μετρούν τα σταθμισμένα τεστ επίδοσης.

Η έρευνα έδειξε επίσης πως όταν οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τις δικές τους μεθόδους επίλυσης, γίνονται περισσότερο ικανοί να εφαρμόζουν τη μαθηματική γνώση σε καινούργιες προβληματικές καταστάσεις.

Μέσα στην τάξη

Τα ερευνητικά αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να επικεντρωθούν στο να δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να αλληλεπιδρούν σε καταστάσεις υψηλού προβληματισμού (*problem-rich situations*). Πέραν αυτού, δίνοντας την κατάλληλη κατάσταση υψηλού προβληματισμού, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να βρίσκουν το δικό τους τρόπο επίλυσης και να τους δίνουν ευκαιρίες να μοιράζονται και να συγκρίνουν τις μεθόδους λύσης και τις απαντήσεις τους με τις μεθόδους λύσης και τις απαντήσεις των άλλων. Ένας τρόπος να οργανωθεί μια διδασκαλία τέτοιου τύπου είναι να βάλουν τους μαθητές να εργαστούν αρχικά σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια να ανταλλάξουν τις ιδέες και τις λύσεις τους σε μια συζήτηση με ολόκληρη την τάξη.

Μια χρήσιμη τεχνική διδασκαλίας για τους εκπαιδευτικούς είναι να δώσουν στους μαθητές ένα ενδιαφέρον πρόβλημα για λύση και οι ίδιοι να κινούνται στην τάξη καθώς οι μαθητές εργάζονται, κρατώντας σημειώσεις για το ποιοι μαθητές χρησιμοποιούν ποιες στρατηγικές. Στην συζήτηση με ολόκληρη την τάξη, ο εκπαιδευτικός μπορεί στη συνέχεια να ζητήσει από τους μαθητές να συζητήσουν τις μεθόδους λύσης τους σε μια προκαθορισμένη και ιεραρχημένη σειρά. Οι μορφές παρουσίασης μπορεί να κυμαίνονται από την άτυπη μέχρι την πιο τυπική ή περίπλοκη. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας χρησιμοποιείται με επιτυχία σε πολλές ιαπωνικές τάξεις στα μαθηματικά.

Βιβλιογραφία: Boaler, 1998; Carpenter et al., 1988, 1989, 1998; Cobb, Yackel & Wood, 1992; Cobb et al., 1991; Cognition and Technology Group, 1997; Fennema, Carpenter & Peterson, 1989; Fennema et al., 1993, 1996; Hiebert & Wearne, 1993, 1996; Kamii, 1985, 1989, 1994; Stigler & Hiebert, 1997; Stigler et al., 1999; Wood, Cobb & Yackel, 1995; Wood et al., 1993; Yackel, Cobb & Wood, 1991.

6. Μάθηση σε μικρές ομάδες

Οι μαθητές που εργάζονται σε μικρές ομάδες στην αντιμετώπιση δραστηριοτήτων προβλημάτων και εργασιών μπορούν να βελτιώσουν την επίδοσή τους στα μαθηματικά.

Ερευνητικά δεδομένα

Σημαντικά ερευνητικά δεδομένα για τη μαθηματική εκπαίδευση δείχνουν ότι με τη χρήση διάφορων τύπων μικρών ομάδων, για διάφορα είδη εργασιών στην τάξη, σημειώνονται θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών. Ο Davidson, για παράδειγμα, πραγματοποίησε μια ανασκόπηση σχεδόν ογδόντα ερευνών στα μαθηματικά, οι οποίες σύγκριναν τις επιδόσεις μαθητών εργαζόμενων σε μικρές ομάδες και μαθητών εργαζόμενων με τον παραδοσιακό τρόπο (μετωπική διδασκαλία σε ολόκληρη την τάξη). Σε περισσότερο από το 40% αυτών των ερευνών, οι μαθητές στις τάξεις που εργάζονταν σε μικρές ομάδες σημείωναν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις μετρήσεις, από τους μαθητές των παραδοσιακών τάξεων. Μόνο σε δυο από τις 79 έρευνες οι μαθητές στις τάξεις ελέγχου σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές που εργάζονταν σε μικρές ομάδες, αλλά στις δυο αυτές έρευνες υπήρξαν κάποιες ανωμαλίες στο σχεδιασμό τους.

Σε μια ανασκόπηση 99 ερευνών ομαδοσυνεργατικής μάθησης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ο Slavin συμπέρανε ότι οι συνεργατικές μέθοδοι ήταν αποτελεσματικές στο να βελτιώσουν την επίδοση των μαθητών. Οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι έδωσαν έμφαση τόσο στην ανάπτυξη συνεργατικών στόχων, όσο και στην ανάπτυξη της ατομικής ευθύνης στους μαθητές.

Σε μια ανασκόπηση που έγινε από τον Webb σε έρευνες οι οποίες εξέταζαν την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε συμμαθητές και την επίδοση σε μικρές ομάδες (17 έρευνες σε μαθητές 2ης ως 11ης τάξης) αναδύθηκαν σημαντικά ευρήματα. Πρώτον, η εξήγηση από έναν μαθητή μιας ιδέας, μεθόδου ή λύσης σε έναν συμμαθητή της ομάδας του βρέθηκε πως είχε θετική επίδραση στην επίδοση του. Δεύτερον, το να παίρνει ένας μαθητής από τους συμμαθητές του στην ομάδα ανατροφοδότηση «μη-απαντητική» (non-responsive) (καθόλου ανατροφοδότηση ή ανατροφοδότηση άσχετη με αυτό που είπε ή έκανε) είχε αρνητική σχέση με την επίδοση του μαθητή. Η ανασκόπηση του Webb επίσης έδειξε ότι οι εργασίες σε ομάδες ήταν αποτελεσματικότερη όταν οι μαθητές είχαν διδαχτεί πως να δουλεύουν στην ομάδα, πως να βοηθούν και πως να βοηθούνται. Η λήψη βοήθειας ήταν περισσότερο αποτελεσματική όταν η βοήθεια είχε τη μορφή τεκμηριωμένων εξηγήσεων (όχι απλά απάντηση) η οποία στη συνέχεια εφαρμόζονταν από το μαθητή είτε στο συγκεκριμένο πρόβλημα είτε σε ένα νέο πρόβλημα.

Ποιοτικές έρευνες έδειξαν ότι και άλλα σημαντικά και συχνά μη μετρήσιμα αποτελέσματα, πέρα από την βελτίωση της γενικής επίδοσης μπορούν να επιτευχθούν από την εργασία σε μικρές ομάδες. Σε μια τέτοια έρευνα οι Yackel, Cobb και Wood μελέτησαν μια δευτέρα τάξη σχολείου στην οποία η στρατηγική της διδασκαλίας για ολόκληρη τη χρονιά ήταν η επίλυση προβλήματος σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη. Βρήκαν ότι αυτή η προσέγγιση δημιούργησε πολλές ευκαιρίες για μάθηση οι οποίες δεν συμβαίνουν στην παραδοσιακή τάξη συμπεριλαμβανομένων των ευκαιριών για συνεργατικό διάλογο και επίλυση των αντικρουόμενων απόψεων των μαθητών.

Η έρευνα του Slavin έδειξε ότι η εργασία σε μικρές ομάδες έφερε θετικά αποτελέσματα στις διαπολιτισμικές σχέσεις και στις στάσεις των μαθητών απέναντι στο σχολείο.

Μέσα στην τάξη

Τα ερευνητικά δεδομένα σαφώς υποστηρίζουν τη χρήση μικρών ομάδων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση, με την παραδοσιακή αξιολόγηση της επίδοσης και επίσης άλλα σημαντικά αποτελέσματα.

Όταν χρησιμοποιούνται μικρές ομάδες στη διδασκαλία των μαθηματικών οι εκπαιδευτικοί πρέπει:

- να επιλέγουν εργασίες οι οποίες ασχολούνται με σημαντικά μαθηματικά περιεχόμενα και έννοιες
- να επιλέγουν δραστηριότητες οι οποίες είναι κατάλληλες για εργασία σε ομάδες
- να σκεφτούν σοβαρά την περίπτωση να ζητήσουν από τους μαθητές να εργαστούν στην αρχή ατομικά και στη συνέχεια σε ομάδες, όπου θα μοιραστούν τις ιδέες τους με τους άλλους και θα αναπτύξουν περαιτέρω την εργασία τους
- να δίνουν σαφείς οδηγίες στις ομάδες και να έχουν σαφείς προσδοκίες από την καθεμία
- να δίνουν έμφαση και στους συνεργατικούς στόχους και στην ατομική ευθύνη
- να επιλεγούν εργασίες που να είναι ενδιαφέρουσες για τους μαθητές
- να εξασφαλίζουν πως η ομαδική εργασία θα καταλήξει σε αποτέλεσμα όπου σημαντικές έννοιες και μέθοδοι αναδύονται από το δάσκαλο από τους μαθητές ή από όλους.

Τέλος, όπως έδειξαν πολλές έρευνες, οι εκπαιδευτικοί δεν θα πρέπει να σκέφτονται την εργασία σε μικρές ομάδες σαν κάτι που πρέπει να χρησιμοποιείται πάντα ή σαν κάτι που δεν πρέπει να χρησιμοποιείται ποτέ. Μάλλον η διδασκαλία σε μικρές ομάδες θα πρέπει να θεωρείται σαν μια διδακτική πρακτική που είναι κατάλληλη για ορισμένα διδακτικά αντικείμενα και σαν διδασκαλία μπορεί να αποδώσει πολύ καλά με άλλους τρόπους οργάνωσης συμπεριλαμβανομένης της μετωπικής διδασκαλίας σε ολόκληρη την τάξη.

Βιβλιογραφία: Cohen, 1994; Davidson, 1985; Laborde, 1994; Slavin, 1990, 1995; Webb, 1991; Webb, Troper & Fall, 1995; Yackel, Cobb & Wood, 1991.

7. Συζήτηση με ολόκληρη την τάξη

Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη, ως συνέχεια της εργασίας που προηγήθηκε σε μικρές ομάδες, βελτιώνει την επίδοση των μαθητών.

Ερευνητικά δεδομένα

Η έρευνα δείχνει ότι, η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη μπορεί να είναι αποτελεσματική, όταν χρησιμοποιείται με σκοπό την παρουσίαση και επεξήγηση της διαφορετικής μεθοδολογίας με την οποία κάθε μαθητής έχει λύσει τα προβλήματα. Επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν την ύπαρξη διαφορετικών τρόπων για την αντιμετώπιση μιας κατάστασης και την ποικιλία των κατάλληλων και αποδεκτών λύσεων.

Ο Wood βρήκε ότι η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη λειτουργεί καλύτερα όταν οι προσδοκίες για τη συζήτηση έχουν γίνει πλήρως κατανοητές. Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να αξιολογούν ο ένας τις ιδέες του άλλου και να αιτιολογούν την άποψή τους, χωρίς να γίνονται επικριτικοί προς τον συνομιλητή τους. Αυτό βοηθάει να δημιουργηθεί ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές αισθάνονται άνετα να μοιράζονται τις ιδέες τους και να συζητούν ο ένας τις σκέψεις και τις μεθόδους του άλλου. Επιπλέον οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να είναι ενεργοί ακροατές οι οποίοι συμμετέχουν στη συζήτηση και αισθάνονται υπεύθυνοι για το αν ο άλλος τους κατανοεί.

Η έρευνα σε γνωστικά θέματα υποδεικνύει ότι, η αλλαγή στο εννοιολογικό επίπεδο και η πρόοδος στη σκέψη, συντελούνται ως αποτέλεσμα των νοητικών διαδικασιών οι οποίες συμμετέχουν στην επίλυση συγκρούσεων και αντιπαραθέσεων. Αν ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της συζήτησης με ολόκληρη την τάξη, διαχειριστεί με σύνεση τη σύγκρουση και τις συγκρούσεις δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για βελτίωση της μάθησης των μαθητών. Καθώς οι μαθητές αντιμετωπίζουν προκλήσεις σχετικά με τη μεθοδολογία που ακολούθησαν, ενδυναμώνουν την κατανόηση των εννοιών και των διαδικασιών δουλεύοντας μαζί με τους συμμαθητές τους για να αποσαφηνίσουν διαφορές στον τρόπο σκέψης τους ή ασάφειες στην ερμηνεία. Κατά μία έννοια η συζήτηση (με ολόκληρη την τάξη) καταλήγει να αποτελέσει μια προσπάθεια επίλυσης προβλήματος με συνεργατικά μέσα. Ο καθένας με τη σειρά του, συνεισφέρει στο συνολικό αποτέλεσμα της επίλυσης προβλήματος. Αυτή συζήτηση βοηθάει να δημιουργηθεί η ιδέα της κοινά αποδεκτής γνώσης (κοινή γνώση) (public knowledge).

Μέσα στην τάξη

Είναι σημαντικό η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη να ακολουθεί την εργασία των μαθητών σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος. Η συζήτηση πρέπει να είναι μια περίληψη της ατομικής εργασίας μέσα από την οποία αναδύθηκαν οι βασικές ιδέες του μαθητή. Αυτό μπορεί να συντελεστεί με την παρουσίαση και τη συζήτηση των προσωπικών μεθόδων και λύσεων από κάθε μαθητή, ή με άλλες μεθόδους που συντονίζονται μόνο από τον εκπαιδευτικό, μόνο από τους μαθητές, ή από όλους μαζί.

Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη μπορεί να γίνει ένα αποτελεσματικό διαγνωστικό εργαλείο για να αποφασίσουμε το βάθος της κατανόησης στους μαθητές και να αναγνωρίσουμε παρανοήσεις. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αναγνωρίσουν περιοχές με

δυσκολίες για συγκεκριμένους μαθητές καθώς επίσης και να εξακριβώσουν περιοχές στις οποίες οι μαθητές επιτυγχάνουν ή προχωρούν κανονικά.

Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη μπορεί να αποτελέσει μια αποτελεσματική και χρήσιμη διδακτική πρακτική. Κάποιες από τις διδακτικές ευκαιρίες που προσφέρει η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη δεν υφίστανται στην εργασία σε μικρές ομάδες ή στην ατομική εργασία. Γι' αυτό το λόγο, η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη έχει μια σημαντική θέση στην τάξη μαζί με τις υπόλοιπες διδακτικές πρακτικές.

Βιβλιογραφία: Ball, 1993; Cobb et al., 1992; Wood, 1999.

8. Αντίληψη του αριθμού

Η διδασκαλία των μαθηματικών με έμφαση στην αντίληψη του αριθμού ενθαρρύνει τους μαθητές να λύνουν προβλήματα σε μια μεγάλη ποικιλία καταστάσεων και να δουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία στηρίζεται στη σκέψη.

Ερευνητικά δεδομένα

Η «αντίληψη του αριθμού» σχετίζεται με το να έχει κάποιος μια διαισθητική αντίληψη για το μέγεθος και τους συνδυασμούς του αριθμού καθώς και την ικανότητα να χρησιμοποιεί τους αριθμούς με ευελιξία με σε προβληματικές καταστάσεις, ώστε να λαμβάνει τεκμηριωμένες αποφάσεις και να διατυπώνει λογικές κρίσεις. Συμπεριλαμβάνει την ικανότητα να μπορεί κάποιος να χρησιμοποιεί με ευελιξία τις διαδικασίες των νοητικών υπολογισμών, τις εκτιμήσεις, την αντίληψη του μεγέθους των αριθμών, τις μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης και εκτίμηση της λογικοφάνειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Οι Markovits και Sowder πραγματοποίησαν έρευνες σε μαθητές έβδομης τάξης όπου διδάσκονται ειδικά κεφάλαια για τα μεγέθη των αριθμών, για τους νοερούς υπολογισμούς και για τους υπολογισμούς με εκτίμηση. Από ατομικές συνεντεύξεις αποφάσισαν ότι, μετά απ' αυτή την ειδική διδασκαλία, οι μαθητές ήταν πιθανότερο να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές οι οποίες φανέρωναν πως είχαν πλήρη αντίληψη του αριθμού και να υιοθετήσουν τη χρήση αυτών των στρατηγικών για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Άλλες σημαντικές έρευνες σ' αυτόν τον τομέα περιλαμβάνουν την ενσωμάτωση της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού στη διδασκαλία άλλων μαθηματικών θεμάτων, σε αντίθεση με τη διδασκαλία διακριτών μαθημάτων με αντικείμενο την αντίληψη του αριθμού. Σε μια έρευνα σε μαθητές δευτέρας τάξης ο Cobb και οι συνεργάτες του διαπίστωσαν ότι η αντίληψη του αριθμού στους μαθητές βελτιωνόταν με την εφαρμογή ενός προγράμματος το οποίο έδινε έμφαση στη λύση προβλημάτων, στην αλληλεπίδραση των μαθητών και στην παραγωγή μεθόδων και λύσεων από τον καθένα τους. Σχεδόν όλοι οι μαθητές ανέπτυξαν μια ποικιλία στρατηγικών για να λύσουν ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων. Οι μαθητές επίσης εμφάνισαν και άλλα επιθυμητά συναισθηματικά αποτελέσματα, όπως αυξημένη εμμονή στην λύση προβλημάτων.

Ο Kamii εργάστηκε με εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι δοκίμαζαν να εφαρμόσουν μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην κονστρουκτιβιστική θεωρία της μάθησης (constructivist theory of learning) η οποία στηρίζεται στη δουλειά του Piaget. Ο πυρήνας της προσέγγισης αυτής ήταν: οι εκπαιδευτικοί να προετοιμάζουν διδακτικές καταστάσεις ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν το δικό τους νόημα, τις δικές τους μεθόδους και τη δική τους αντίληψη του αριθμού. Τα δεδομένα που συνέλεξαν από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές έδειξαν ότι, η πειραματική ομάδα παρουσίασε μεγαλύτερη αυτονομία, εννοιολογική κατανόηση της αξίας θέσης και ικανότητα να κάνει εκτιμήσεις και νοερούς υπολογισμούς, σε αντίθεση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου.

Μέσα στην τάξη

Η έμφαση στην αντίληψη του αριθμού κατά τη διδασκαλία μιας ποικιλίας μαθηματικών θεμάτων βελτιώνει την ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται τους αριθμούς. Ένα σημαντικό μαθηματικό αποτέλεσμα για τους μαθητές είναι η πλήρης επάρκεια στην αντίληψη του αριθμού. Περισσότερο από το 90% των υπολογισμών που γίνεται έξω από την τάξη γίνεται χωρίς μολύβι και χαρτί, χρησιμοποιώντας νοερούς υπολογισμούς, εκτιμήσεις ή αριθμομηχανή. Παρόλα αυτά, δεν δίνεται πάντα η απαραίτητη έμφαση στην προσπάθεια να καλλιεργήσουμε την αντίληψη του αριθμού στους μαθητές.

Καθώς οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν στρατηγικές για να διδάξουν την αντίληψη του αριθμού, θα πρέπει να σκεφτούν σοβαρά να ξεφύγουν από τη διδασκαλία χωριστών μαθημάτων που το καθένα εστιάζει στην ανάπτυξη μιας μεμονωμένης δεξιότητας, προς μια ολιστική προσέγγιση, η οποία ενθαρρύνει την ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού σε όλες τις δραστηριότητες στην τάξη, από την ανάπτυξη διαδικασιών υπολογισμού μέχρι την επίλυση προβλημάτων. Αν και χρειάζεται περισσότερη έρευνα, φαίνεται πως μια ολιστική προσέγγιση στη διδασκαλία αντίληψης του αριθμού είναι πιθανόν να φέρει αποτελέσματα όχι μόνο στη βαθύτερη αντίληψη του αριθμού, αλλά επίσης και σε άλλες εξίσου σημαντικές έννοιες των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία: Cobb et al.,1991; Greeno,1991; Kamii,1985,1989, 1994; Markovits & Sowder, 1994; Reys & Barger, 1994; Reys et al., 1991; Sowder, 1992a, 1992b.

9. Χρήση εποπτικού υλικού

Η χρήση εποπτικού υλικού για μεγάλο χρονικό διάστημα έχει θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά και τη βελτίωση των στάσεων τους για τα μαθηματικά.

Ερευνητικά δεδομένα

Πολλές έρευνες δείχνουν ότι η χρήση εποπτικού υλικού μπορεί να προσδώσει νόημα στα συστήματα συμβολισμού (notational systems) και να βελτιώσει την ανάπτυξη εννοιών στους μαθητές. Σε μια εμπειριστατωμένη ανασκόπηση μαθημάτων με δραστηριότητες στα μαθηματικά από το νηπιαγωγείο μέχρι την όγδοη τάξη, οι Suydam και Higgins συμπέραναν ότι με τη χρήση υλικών που οι μαθητές χειρίζονται με τα χέρια (manipulative) η επίδοση είναι καλύτερη από ότι χωρίς τη χρήση των υλικών αυτών. Σε μια πρόσφατη μετά-ανάλυση εξήντα ερευνών (νηπιαγωγείο μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) η οποία συγκρίνει τις επιδράσεις της χρήσης εποπτικού υλικού από τους μαθητές, με τις επιδράσεις της θεωρητικής διδασκαλίας, ο Sowell συμπέρανε ότι, η χρήση εκπαιδευτικού εποπτικού υλικού για μεγάλο διάστημα, όταν οι εκπαιδευτικοί γνώριζαν πως να το αξιοποιήσουν, βελτίωνε την επίδοση των μαθητών και τις στάσεις τους.

Παρά τα γενικά θετικά αποτελέσματα υπάρχουν κάποιες ασυνέχειες στα ερευνητικά δεδομένα. Όπως υπογραμμίζει ο Thompson, τα αποτελέσματα των ερευνών σχετικά με το εποπτικό υλικό ποικίλλουν, ακόμη και μεταξύ ερευνών οι οποίες ελέγχονταν προσεκτικά, παρακολουθούνταν από κοντά και χρησιμοποιούσαν το ίδιο εποπτικό υλικό. Για παράδειγμα, σε έρευνες από τους Resnick & Omanson και τον Labinowicz η χρήση κύβων οργανωμένων σε δεκάδες, αποδείχθηκε ότι είχε πολύ λίγη επίδραση στη μάθηση των μαθητών. Αντιθέτως οι Fuson και Briars, ο Hiebert και ο Wearne κατέγραψαν θετικά αποτελέσματα από τη χρήση κύβων οργανωμένων σε δεκάδες.

Οι διαφορές στα αποτελέσματα ανάμεσα σε αυτές τις έρευνες μπορεί να οφείλονται στη φύση της εμπλοκής των μαθητών με το εποπτικό υλικό και τη στάση τους απέναντι στα αντικείμενα σε σχέση την αριθμητική τους αξία και με το σύστημα συμβολισμού. Μπορεί επίσης να οφείλονται σε διαφορετικό προσανατολισμό των ερευνών αναφορικά με το ρόλο των αλγορίθμων και τον τρόπο που αυτοί πρέπει να διδάσκονται στην τάξη. Γενικά όμως οι αντιφάσεις σε μερικά από τα ερευνητικά ευρήματα δεν αποδυναμώνουν την επικρατούσα άποψη ότι το εποπτικό υλικό είναι πολύτιμο διδακτικό εργαλείο.

Μέσα στην τάξη

Αν και, για μια επιτυχημένη διδασκαλία, θεωρείται επαρκές το να επιλέξουν οι εκπαιδευτικοί προσεκτικά τις διαδικασίες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν με βάση την έννοια που θα διδαχθεί, η χρήση του εποπτικού υλικού στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως τονίζεται από τις μέχρι τώρα έρευνες, θα πρέπει να είναι πιο συχνή, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές εμπειρία μέσω προσωπικής εμπλοκής, η οποία θα τους βοηθήσει να δομήσουν χρήσιμες αντιλήψεις για τις μαθηματικές έννοιες που μαθαίνουν. Η χρήση του ίδιου υλικού για τη διδασκαλία διαφορετικών εννοιών στα μαθήματα του σχολείου έχει το πλεονέκτημα να ελαττώνει το χρόνο που απαιτείται ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές με

τα συγκεκριμένα υλικά και επίσης τους βοηθάει να αναγνωρίσουν τις συνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές έννοιες.

Η χρήση του εποπτικού υλικού δεν θα πρέπει να περιορίζεται σε απλή επίδειξη. Είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν το υλικό με τρόπο που να έχει νόημα γι' αυτούς, παρά με έναν αυστηρά προκαθορισμένο τρόπο, ο οποίος ενισχύει περισσότερο τη μνήμη παρά τη σκέψη. Γι' αυτό το λόγο, όπως λέει ο Thompson, «για να μπορέσουν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν αποδοτικά το εποπτικό υλικό, πρέπει πρώτα να έχουν νιώσει την ανάγκη να δώσουν νόημα στις δραστηριότητές τους και να εκφράσουν τις σκέψεις τους με κατανοητό τρόπο. Ακόμη είναι σημαντικό οι μαθητές να καταλάβουν την αμφίδρομη σχέση μεταξύ του εποπτικού υλικού που συνοδεύει μια μαθηματική έννοια και του συστήματος συμβολισμού το οποίο χρησιμοποιείται για να την αναπαραστήσει».

Βιβλιογραφία: Fuson & Briars, 1990; Hiebert & Wearne, 1992; Labinowicz, 1985; Leinenbach & Raymond, 1996; Resnick & Omanson, 1987; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977; Thompson, 1992; Varelas & Becker, 1997.

10. Η χρήση αριθμομηχανών από τους μαθητές

Η χρήση αριθμομηχανών στη μάθηση των μαθηματικών μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της επίδοσης και των στάσεων των μαθητών.

Ερευνητικά δεδομένα

Η επίδραση των αριθμομηχανών στην μάθηση των μαθητών ήταν ένα δημοφιλές θέμα έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι πολλές έρευνες που έγιναν δείχνουν ότι η συνετή χρήση αριθμομηχανών μέσα στην τάξη των μαθηματικών βελτιώνει την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά και τις στάσεις τους απέναντι σε αυτά.

Από μια μετα-ανάλυση 79 ερευνών σχετικά με απλές αριθμομηχανές (χωρίς δυνατότητα γραφικών παραστάσεων), ο Hembree και ο Dessart συμπέραναν ότι η χρήση τους βελτίωσε τη μάθηση των μαθητών. Συγκεκριμένα παρατήρησαν βελτίωση στην κατανόηση των αριθμητικών εννοιών και στις δεξιότητες επίλυσης προβλήματος στους μαθητές. Η ανάλυση έδειξε επίσης ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν αριθμομηχανές έτειναν να επιδεικνύουν θετικότερη στάση απέναντι στα μαθηματικά και καλύτερη κατανόηση εννοιών από εκείνους που δεν τις χρησιμοποιούν. Επίσης, δεν παρατήρησαν ελάττωση της ικανότητας υπολογισμών με μολύβι και χαρτί στους μαθητές που χρησιμοποιούσαν αριθμομηχανές στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η έρευνα στη χρήση επιστημονικών αριθμομηχανών με δυνατότητες γραφικών παραστάσεων έδειξε επίσης θετικά αποτελέσματα στις επιδόσεις των μαθητών. Στις περισσότερες έρευνες παρατηρήθηκε θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να κάνουν γραφικές αναπαραστάσεις, στην βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης των γραφημάτων και της ικανότητας των μαθητών να συσχετίζουν γραφικές παραστάσεις με άλλες αναπαραστάσεις όπως πίνακες και σύμβολα. Άλλες θεματικές περιοχές όπου εμφανίστηκε βελτίωση, όταν χρησιμοποιήθηκαν τέτοιες αριθμομηχανές στη διδασκαλία, ήταν η κατανόηση των τύπων και η οπτικοποίηση του χώρου. Άλλες έρευνες υπογράμμισαν ότι οι μαθητές γίνονται καλύτεροι στην επίλυση προβλημάτων όταν χρησιμοποιούν αριθμομηχανές με δυνατότητα γραφικών παραστάσεων. Επιπλέον, οι μαθητές γίνονται πιο ευέλικτοι στον τρόπο που σκέφτονται αναφορικά με στρατηγικές λύσης, αποκτούν καλύτερη μνημονική συγκράτηση και εστιάζουν περισσότερο στην προσπάθεια να αντιληφθούν το πρόβλημα εννοιολογικά παρά δίνοντας έμφαση σε υπολογισμούς. Όμως με την αυξημένη χρήση των αριθμομηχανών με δυνατότητα γραφικών παραστάσεων, οι μαθητές είναι πιο πιθανό να βασίζονται περισσότερο σε διαδικασίες γραφικών αναπαραστάσεων παρά σε άλλες διαδικασίες όπως οι αλγεβρικές. Οι περισσότερες έρευνες για τις αριθμομηχανές με δυνατότητα γραφικών παραστάσεων δεν βρήκαν αρνητικές επιδράσεις στις βασικές δεξιότητες, σε μαθηματικές γνώσεις ή σε δεξιότητες υπολογισμών.

Γενικά, η έρευνα έδειξε ότι η χρήση των αριθμομηχανών αλλάζει το περιεχόμενο, τις μεθόδους και τις απαιτήσεις σε δεξιότητες στις τάξεις των μαθηματικών. Οι έρευνες έδειξαν ότι όταν χρησιμοποιούνται αριθμομηχανές, οι μεν εκπαιδευτικοί κάνουν ερωτήσεις υψηλότερου επιπέδου οι δε μαθητές εμπλέκονται πιο ενεργά, κάνοντας ερωτήσεις, εικάζοντας και εξερευνώντας.

Μέσα στην τάξη

Η έρευνες στηρίζουν την απαίτηση του *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* το οποίο εκδόθηκε από το National Council of Teachers of Mathematics, για χρήση αριθμομηχανών σε όλα τα επίπεδα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η προσεκτικά σχεδιασμένη χρήση αριθμομηχανών έχει σαν αποτέλεσμα τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές και τη βελτίωση των συναισθηματικών αποτελεσμάτων χωρίς απώλειες στις βασικές τους δεξιότητες.

Οι αριθμομηχανές μπορούν να αποτελέσουν πολύτιμο εργαλείο έρευνας και ανακάλυψης στην επίλυση προβλημάτων και στην εισαγωγή νέου μαθηματικού περιεχομένου. Ελαττώνοντας το χρόνο υπολογισμών και δίνοντας άμεσα ανατροφοδότηση, οι αριθμομηχανές βοηθούν τους μαθητές να επικεντρωθούν στην κατανόηση της εργασίας τους και στη δικαιολόγηση των μεθόδων και των αποτελεσμάτων τους. Οι αριθμομηχανές με δυνατότητα γραφικών παραστάσεων είναι εξαιρετικά χρήσιμες στη γραφική αναπαράσταση εννοιών και στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ αλγεβρικών και γεωμετρικών εννοιών.

Για να αποτυπωθεί με ακρίβεια η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά, ίσως θα πρέπει να τους επιτραπεί να χρησιμοποιούν τις αριθμομηχανές τους στα τεστ επίδοσης. Αν δεν συμβεί αυτό, θα αποτελεί μια σημαντική ασυνέχεια στον συνηθισμένο τρόπο πολλών μαθητών να κάνουν μαθηματικά και ένα αφύσικο περιορισμό, γιατί, όταν βρεθούν μακριά από το σχολείο, στην καθημερινή τους ζωή ή στη δουλειά τους, σίγουρα θα χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή. Ένας άλλος παράγοντας ο οποίος συναινεί στη χρήση των αριθμομηχανών είναι ότι οι μαθητές ήδη μπορούν να τις χρησιμοποιούν σε κάποιες επίσημες δοκιμασίες. Επιπλέον, σε κάποιες εξετάσεις, οι υποψήφιοι επιβάλλεται να χρησιμοποιούν αριθμομηχανή με δυνατότητα γραφικών παραστάσεων.

Βιβλιογραφία: Davis, 1990; Drijvers & Doorman, 1996; Dunham & Dick, 1994; Flores & McLeod, 1990; Giamati, 1991; Groves & Stacey, 1998; Harvey, 1993; Hembree & Dessart, 1986, 1992; Mullis, Jenkins & Johnson, 1994; National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Penglase & Arnold, 1996; Rich, 1991; Ruthven, 1990; Slavit, 1996; Smith, 1996; Stacey & Groves, 1994; Wilson & Krapfl, 1994.

Συμπεράσματα

Το βιβλιαράκι αυτό είναι απόσπασμα από το κεφάλαιο Μαθηματικά από το εγχειρίδιο *Handbook of research on improving student achievement, second edition*. Παρουσιάζει μια σύνθεση της επιστημονικής γνώσης σχετικά με αποτελεσματικές πρακτικές για τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης στα μαθηματικά. Αυτό το υλικό απευθύνεται για χρήση σε εκπαιδευτικούς, διευθυντές, στελέχη εκπαίδευσης και σχεδιαστές εκπαιδευτικής πολιτικής τους οποίους απασχολεί το πώς θα βελτιώσουν την επίδοση των μαθητών.

Τα ερευνητικά δεδομένα που παρουσιάζονται στοχεύουν να αποτελέσουν το σημείο εκκίνησης για δραστηριότητες εκπαιδευτικής επιμόρφωσης του προσωπικού και να γίνει το έναυσμα για ζωνρή συζήτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών, μάλλον, παρά μια συνταγή η οποία είναι εφαρμόσιμη με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις τάξεις. Όπως η Miriam Met περιγράφει στο κεφάλαιο Ξένες Γλώσσες στο βιβλίο *Handbook of research on improving student achievement*:

Η έρευνα δεν μπορεί να αναγνωρίσει και δεν αναγνωρίζει, το σωστό ή το βέλτιστο τρόπο διδασκαλίας [...] Αλλά η έρευνα μπορεί να μας διαφωτίσει για το ποιες διδακτικές πρακτικές είναι πιθανότερο να πετύχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα, με ποιους τύπους μαθητών, και κάτω από ποιες συνθήκες [...] Αν και η έρευνα μπορεί να δώσει κατευθύνσεις σε πολλές περιοχές, μας δίνει λίγες ξεκάθαρες απαντήσεις στις περισσότερες απ' αυτές. Οι εκπαιδευτικοί έρχονται καθημερινά αντιμέτωποι με δύσκολες αποφάσεις για το πώς θα πετύχουν τα καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα τα οποία αναφέρονται στα αναλυτικά προγράμματα. Ένας συνδυασμός από ερευνητικές υποδείξεις, διδακτικές πρακτικές και επαγγελματική κρίση μαζί με την εμπειρία είναι πιθανόν να παράγει [υψηλή επίδοση στους μαθητές].

Έτσι, το φυλλάδιο αυτό δεν μπορεί να δώσει στους εκπαιδευτικούς όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για να γίνουν ειδικοί σε διδακτικές πρακτικές βασισμένες σε έρευνες των μαθηματικών. Αυτό το υλικό σχεδιάστηκε περισσότερο για να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εκκίνησης για συζήτηση και περαιτέρω έρευνα.

Για παράδειγμα, μια προσέγγιση εκπαιδευτικής επιμόρφωσης μπορεί να είναι: να διανεμούμε το φυλλάδιο στους εκπαιδευτικούς, να βρούμε ποιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ήδη κάποιες τέτοιες πρακτικές και στη συνέχεια να δώσουμε την ευκαιρία σ' αυτούς να δείξουν τις πρακτικές και στους υπόλοιπους. Στη συνέχεια μια ερευνητική ομάδα μπορεί να σχηματιστεί για να προχωρήσει περαιτέρω την έρευνα και την αναζήτηση. Η αναλυτική βιβλιογραφία που ακολουθεί και οι άλλες πηγές οι οποίες παρατίθενται μπορούν να αποτελέσουν το σημείο εκκίνησης. Η εργασία της ερευνητικής ομάδας μπορεί να βάλει τα θεμέλια σε ένα σχέδιο επαγγελματικής επιμόρφωσης για την επομένη ή τις επόμενες δυο σχολικές χρονιές, ώστε να δώσει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να μάθουν περισσότερα και να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση για να χρησιμοποιήσουν τις επιλεγμένες πρακτικές στην τάξη τους.

Προτάσεις από κάποιους που χρησιμοποίησαν το εγχειρίδιο

Μετά την πρώτη έκδοση του εγχειριδίου *Handbook of research on improving student achievement*, η υπηρεσία Εκπαιδευτικής Έρευνας (Educational Research Service) ζήτησε από όσους το χρησιμοποίησαν να δηλώσουν πώς το εγχειρίδιο και το σχετικό υλικό

τους βοήθησαν στις προσπάθειες τους να βελτιώσουν τις διδακτικές τους πρακτικές. Εδώ παρατίθενται κάποιες από τις εμπειρίες τους στη χρήση αυτού του υλικού για εκπαιδευτική επιμόρφωση:

- Κάποιοι εκπαιδευτικοί προτείνουν την ανάλυση μιας πρακτικής κάθε μήνα στις συναντήσεις που γίνονται σε όλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Η πρακτική αυτή θα αποτελέσει το θέμα στο οποίο θα εστιαστεί η συζήτηση, οι συνάδελφοι οι οποίοι τη χρησιμοποίησαν ήδη, θα είναι η πηγή και οι μέντορες για τους άλλους εκπαιδευτικούς που ενδιαφέρονται να χρησιμοποιήσουν την πρακτική αυτή στην τάξη τους. Όπως σημείωσε ένας εκπαιδευτικός «η εκπαιδευτική επιμόρφωση δεν αποδίδει όταν υποδεικνύουμε στους εκπαιδευτικούς τι χρειάζονται – (αν το κάνουμε αυτό) τότε απλώς ακολουθούν παθητικά».
- Ένα σχολείο ανέφερε ότι χρησιμοποίησε το υλικό σαν πηγή όταν οι εκπαιδευτικοί συναντήθηκαν για να συζητήσουν εναλλακτικές προσεγγίσεις οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν με μαθητές που παρουσίαζαν δυσκολίες. Το εγχειρίδιο «μας έδωσε ιδέες και ήταν ένας καλός οδηγός για άλλες πηγές».
- Στελέχη της εκπαίδευσης μελέτησαν το εγχειρίδιο και στη συνέχεια συναντήθηκαν με τους εκπαιδευτικούς τους για να εξετάσουν τα περιεχόμενα συγκεκριμένων κεφαλαίων και τις απόψεις των ειδικών. Ζητήθηκε από κάθε εκπαιδευτικό να αναγνωρίσει μια πρακτική, η οποία στηριζόταν σε έρευνες με την οποία ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να εμπλουτίσει τις διδακτικές του στρατηγικές κατά το πρώτο τρίμηνο του έτους. Οι συζητήσεις που ακολούθησαν έγιναν από εκπαιδευτικούς και ειδικούς οι οποίοι συναντήθηκαν για να ανταλλάξουν ιδέες.
- Ένας από τους συμμετέχοντες αναγνώρισε μια σημαντική χρήση για το υλικό: ως εργαλείο αξιολόγησης των διδακτικών πρακτικών που οι εκπαιδευτικοί ήδη χρησιμοποιούν. Όπως είπε «είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να ξέρουν τι γνωρίζουν και επίσης τι χρειάζεται ακόμη να μάθουν».
- Οι εκπαιδευτικοί μιας περιφέρειας ανέλυσαν και συζήτησαν τα ερευνητικά δεδομένα, στη συνέχεια επιμορφώθηκαν και υποστηρίχθηκαν σε στρατηγικές για τις οποίες οι ίδιοι ενδιαφέρονταν.
- Μια διευθύντρια, παρ' όλες τις επιφυλάξεις της σχετικά με το χρόνο που ξόδευαν οι εκπαιδευτικοί στο φωτοτυπικό μηχάνημα του σχολείου της, τοποθέτησε ένα αντίγραφο του εγχειριδίου δίπλα στο φωτοτυπικό. Ανέφερε ότι στους εκπαιδευτικούς άρεσε το μικρό μέγεθος του εγχειριδίου το οποίο τους επέτρεπε να διαβάσουν γρήγορα (καθώς φωτοτυπούσαν) για κάποια από τις πρακτικές.
- Μια άλλη υπόδειξη που έγινε από τους εκπαιδευτικούς ήταν η χρήση υλικών για να βοηθηθούν οι λιγότερο έμπειροι εκπαιδευτικοί να «ξεπεράσουν τα εμπόδια». Οι πιο έμπειροι εκπαιδευτικοί θα εργάζονταν συνεργατικά με τους νεότερους ώστε να τους βοηθήσουν να επεκτείνουν και να βελτιώσουν τις στρατηγικές που ήδη χρησιμοποιούσαν.

Το θέμα: μια σχολική κουλτούρα για αποτελεσματική εκπαιδευτική επιμόρφωση

Η εμπειρία έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται χρόνο για να επεξεργαστούν τις νέες πληροφορίες, να παρατηρήσουν και να συζητήσουν νέες πρακτικές και να συμμετέχουν στην επιμόρφωση που απαιτείται ώστε να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση για τις

νέες τεχνικές. Αυτό συχνά σημαίνει αλλαγές στον παραδοσιακό προγραμματισμό του σχολείου ώστε να δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να συναντηθούν με τους συναδέλφους τους για ανταλλαγή δεξιοτήτων και εμπειριών μεταξύ τους. Καθώς το σχολείο συνεχίζει το έργο βελτίωσης της επίδοσης των μαθητών εμπλουτίζοντας την επιστημονική γνώση των εκπαιδευτικών, η ανάγκη της αναδόμησης του σχολείου γίνεται ολοένα και πιο προφανής.

Η επιτυχημένη χρήση της επιστημονικής γνώσης στη βελτίωση της μάθησης των μαθηματικών από τους μαθητές όπως και στην περίπτωση άλλων διδακτικών αντικειμένων τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο εγχειρίδιο, βασίζεται κυρίως στην αποτελεσματική εκπαιδευτική επιμόρφωση. Όπως λέει στο αντίστοιχο κεφάλαιο του εγχειριδίου ο γενικός διευθυντής του Εθνικού Συμβουλίου επιμόρφωσης προσωπικού:

Αν οι εκπαιδευτικοί πρόκειται να εφαρμόσουν στην τάξη τους με συνέπεια τα δεδομένα των ερευνών που περιγράφονται σε αυτό το φυλλάδιο είναι απαραίτητη υψηλής ποιότητας εκπαιδευτική επιμόρφωση. Αυτή η επιμόρφωση όμως πρέπει να είναι σημαντικά διαφορετική από αυτή που τους προσφέρονταν στο παρελθόν. Δεν πρέπει μόνο να επηρεάσει τη γνώση τις στάσεις και τις πρακτικές του κάθε δασκάλου, διευθυντή ή εκπαιδευτικού ειδικότητας του σχολείου, αλλά πρέπει επίσης, να αλλάξει την κουλτούρα και τις δομές του οργανισμού στον οποίο αυτά τα άτομα εργάζονται.

Οι αλλαγές που απαιτούνται στην κουλτούρα της εκπαιδευτικής επιμόρφωσης περιλαμβάνουν: μεγαλύτερη έμφαση τόσο στη βελτίωση του σχολείου ως οργανισμού όσο και στην προσωπική επιμόρφωση των διδασκόντων, συστηματική μελέτη της διαδικασίας διδασκαλίας και μάθησης, προσπάθειες για εκπαιδευτική επιμόρφωση οι οποίες να στηρίζονται σε ξεκάθαρες κατανοητές στρατηγικές σχεδιασμού, έμφαση στις ανάγκες των μαθητών και στα αποτελέσματα της μάθησης και, τέλος, να συμπεριληφθούν στη συνολική προσπάθεια τόσο γενικές όσο και εξειδικευμένες παιδαγωγικές δεξιότητες.

Τα περιεχόμενα αυτού του φυλλαδίου και του εγχειριδίου μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια σωστά σχεδιασμένη εκπαιδευτική επιμόρφωση. Αν τα σχολεία δώσουν ικανό αριθμό ευκαιριών στους εκπαιδευτικούς για εκπαίδευση και συνεργασία οι εκπαιδευτικοί και μπορούν και θα βελτιώσουν τη διδασκαλία και τη μάθηση με τρόπους που πραγματικά θα ωφελήσουν όλους τους μαθητές. Για να πετύχουν αυτό το αποτέλεσμα η εκπαιδευτική επιμόρφωση θα πρέπει να θεωρηθεί ως βασικό και αναπόσπαστο μέρος στη διαδικασία βελτίωσης του σχολείου.

Επιπλέον πηγές

Πηγές διαθέσιμες μέσω της Υπηρεσίας Εκπαιδευτικής Έρευνας (Educational Research Service)

Handbook of research on improving student achievement, second edition (207 pages, plus appendix). Edited by Gordon Cawelti, this publication gives teachers, administrators and others access to the knowledge base on instructional practices that improve student learning in all the major subject areas from kindergarten to the end of secondary education, including mathematics. The *Handbook*, originally published in 1995, has been updated by the original authors, who are respected authorities in their content areas. Thorough reviews of the recent research have led to the addition of new practices and

expanded insight into existing practices. An appendix covers research-based practices in beginning reading instruction.

- ***Improving student achievement in mathematics*** (28- page booklet). This booklet contains the entire mathematics chapter of the *Handbook of research on improving student achievement*, written by Douglas A. Grouws and Kristin J. Cebulla. It includes an introduction by Gordon Cawelti and a section on ideas for expanding teachers' ability to use research-based instructional practices.
- ***Improving student achievement in mathematics*** (two 30-minute videotapes). These videotapes illustrate each of the ten instructional practices described in the mathematics chapter of the *Handbook*, using classroom scenes and interviews with teachers and school administrators in the Cedar Rapids School District, Iowa, and the Alexandria City Schools, Virginia. The teachers' insights based on their actual experience using these research-based practices can serve as a springboard for powerful staff development activities that will spark discussion and further exploration. The ten practices are presented in self-contained segments, giving users the option of viewing one practice and then studying that practice in detail before exploring additional practices.

ERS Info-Files

Each *ERS Info-File* contains 70–100 pages of articles from professional journals, summaries of research studies and related literature concerning the topic, plus an annotated bibliography that includes an Educational Resources Information Center (ERIC-CIJE) search.

- ***Math education and curriculum development***. Examines the implementation of the curriculum standards for mathematics, including models for integrating the standards and related impacts on students and teachers.
- ***Math manipulatives and calculators***. Describes the use of concrete objects to teach mathematical concepts. Includes suggestions for materials, the scope of use of manipulatives, structuring manipulatives into lesson plans and use of computers. Discusses the rationale for using calculators to teach mathematical concepts.
- ***Problem solving in math and science***. Reviews effective methods and strategies for teaching problem solving from kindergarten to grade 12. Materials include ideas for activities as well as grading methods.

Άλλες πηγές (additional sources of information)

Every child mathematically proficient: an action plan.

This action paper was developed by the Learning First Alliance, an organization of twelve leading national education associations. It sets forth recommendations for curriculum changes, professional development initiatives, parent involvement efforts and research-based reforms. 24 pages. Price: \$3.00. Order from National Education Association Professional Library order desk: (1-800) 229-4200.

Improving teaching and learning in science and mathematics.

Illustrates how constructivist ideas can be used by science and mathematics educators for research and the further improvement of mathematics practice. 1996. Available from Teachers College Press, Teachers College, Columbia University, P.O. Box 20, Williston, VT 05495, USA. Telephone: (1-802) 864-7626.

Mathematics, science, & technology education programs that work, and Promising practices in mathematics and science.

Published by the United States Department of Education. The first volume describes programmes from the Department's National Diffusion Network; the second describes successful programmes identified by the Office of Educational Research and Improvement. Price: \$21.00 for the two-volume set. Stock No. 065-000-00627-8. Available from Superintendent of Documents, P.O. Box 371954, Pittsburgh, PA 15250-7954, USA. Telephone: (1-202) 512-1800; fax: (1-202) 512-2250.

Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

Describes fifty-four standards developed by the National Council of Teachers of Mathematics to 'create a coherent vision of mathematical literacy and provide standards to guide the revision of the mathematics curriculum in the next decade'. 1989. 258 pages. \$25.00. Available from National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593, USA. Telephone: (1-703) 620-9840; fax: (1-703) 476-2970.

Eisenhower National Clearinghouse (Ohio State University).

Part of a network funded by the United States Department of Education, which together with ten regional science and mathematics consortia, collaborates to identify and disseminate exemplary materials, to provide technical assistance about teaching methods and tools to schools, teachers and administrators, and to work with other organizations trying to improve mathematics and science education.

Online: <http://www.enc.org>

National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science,

Wisconsin Center for Educational Research, University of Wisconsin-Madison. Publications include the quarterly newsletter *Principled practice*, which examines educators' observations and concerns about issues in mathematics and science education. 1025 West Johnson Street, Madison, WI 53706, USA. Telephone: (1-608) 265-6240; fax: (1-608) 263-3406;

e-mail: ncisla@mail.soemadison.wisc.edu;

web site: <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>

Related websites

- ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education
<http://www.ericse.org/sciindex.html>
- The Regional Alliance for Mathematics and Science Education
<http://ra.terc.edu/alliance/HubHome.html>
- National Council of Teachers of Mathematics
<http://www.nctm.org>

Βιβλιογραφία

- American Association of University Women. 1998. Gender gaps: where schools still fail our children. Washington, DC, AAUW.
- Atanda, D. 1999. Do gatekeeper courses expand education options? Washington, DC, National Center for Education Statistics. (NCES 1999303.)
- Aubrey, C. 1997. Mathematics teaching in the early years: an investigation of teachers' subject knowledge. London, Falmer Press.
- Ball, D. 1993. With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 93, p. 373–97.
- Boaler, J. 1998. Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 41–62.
- Brownell, W.A. 1945. When is arithmetic meaningful? *Journal of educational research* (Washington, DC), vol. 38, p. 481–98.
- . 1947. The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 47, p. 256–65.
- Carpenter, T.P., et al. 1988. Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 385–401.
- . 1989. Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 26, p. 499–531.
- . 1998. A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 3–20.
- Cobb, P.; Yackel, E.; Wood, T. 1992. A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 2–23.
- Cobb, P., et al. 1991. Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 3–29.
- . 1992. Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 29, p. 573–604.
- Cognition and Technology Group. 1997. The Jasper Project: lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development. Mahwah, NJ, Erlbaum.
- Cohen, E.G. 1994. Restructuring the classroom: conditions for productive small groups. *Review of educational research* (Washington, DC), vol. 64, p. 1–35.
- Davidson, N. 1985. Small group cooperative learning in mathematics: a selective view of the research. In: Slavin, R., ed. *Learning to cooperate, cooperating to learn*, p. 211–30. New York, Plenum Press.
- Davis, M. 1990. Calculating women: precalculus in context. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH, November.
- Drijvers, P.; Doorman, M. 1996. The graphics calculator in mathematics education. *Journal of mathematical behaviour* (Stamford, CT), vol. 15, p. 425–40.

- Dunham, P.H.; Dick, T.P. 1994. Research on graphing calculators. *Mathematics teacher* (Reston, VA), vol. 87, p. 440–45.
- Fawcett, H.P. 1938. The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in senior high school to develop an understanding of the nature of proof. 1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York, Columbia University, Teachers College.
- Fennema, E.; Carpenter, T.P.; Peterson, P.L. 1989. Learning mathematics with understanding: cognitively guided instruction. In: Brophy, J., ed. *Advances in research on teaching*, p. 195–221. Greenwich, CT, JAI Press.
- Fennema, E., et al. 1993. Using children's mathematical knowledge in instruction. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 555–83.
- . 1996. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 403–34.
- Flanders, J. R. 1987. How much of the content in mathematics textbooks is new?' *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 35, p. 18–23.
- Flores, A.; McLeod, D.B. 1990. Calculus for middle school teachers using computers and graphing calculators. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH, November.
- Fuson, K.C. 1992. Research on whole number addition and subtraction. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p.243–75. New York, Macmillan.
- Fuson, K.C.; Briars, D.J. 1990. Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 180–206.
- Giamati, C.M. 1991. The effect of graphing calculator use on students' understanding of variations of their graphs. Doctoral dissertation, University of Michigan. *Dissertation Abstracts International*, vol. 52, 103A. (University Microfilms No. AAC 9116100.)
- Good, T.L.; Grouws, D.A.; Ebmeier, H. 1983. *Active mathematics teaching*. New York, Longman.
- Greeno, J.G. 1991. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education* (Reston,VA), vol. 22, p. 170–218.
- Grouws, D.A.; Smith, M.S. In press. Findings from NAEP on the preparation and practices of mathematics teachers. In: Silver, E.A.; Kenney, P., eds. *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Groves, S.; Stacey, K. 1998. Calculators in primary mathematics: exploring number before teaching algorithms. In: Morrow, L.J., ed. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, p. 120–29. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Harvey, J.G.1993. Effectiveness of graphing technology in a precalculus course: the 1988–89 field test of the C3PC materials. Paper presented at the Technology in Mathematics Teaching Conference, Birmingham, UK, September.
- Hawkins, E.F.; Stancavage, F.B.; Dossey, J.A. 1998. School policies and practices affecting instruction in mathematics: findings from the National Assessment of Educational Progress. Washington, DC, National Center for Educational Statistics. (NCES 98-495.)

- Heid, M.K. 1988. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 3–25.
- Hembree, R.; Dessart, D.J. 1986. Effects of hand-held calculators in pre-college mathematics education: a meta-analysis. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 17, p. 83–99.
- . 1992. Research on calculators in mathematics education. In: Fey, J.T., ed. *Calculators in mathematics education. 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, p. 22–31. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. 1992. Learning and teaching with understanding. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 65–97. New York, Macmillan.
- Hiebert, J.; Wearne, D. 1992. Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 98–122.
- . 1993. Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 393–425.
- . 1996. Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 14, p. 251–83.
- Hiebert, J., et al. 1997. *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH, Heinemann.
- Husen, T. 1967. *International study of achievement in mathematics*, vol. 2. New York, Wiley.
- Kamii, C. 1985. *Young children reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- . 1989. *Young children continue to reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- . 1994. *Young children continue to reinvent arithmetic in 3rd grade: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- Keeves, J.P. 1976. Curriculum factors influencing school learning. *Studies in educational evaluation* (Kidlington, UK), vol. 2, p. 167–84.
- . 1994. *The world of school learning: selected key findings from 35 years of IEA research*. The Hague, Netherlands, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Kilpatrick, J. 1992. A history of research in mathematics education. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 3–38. New York, Macmillan.
- Knapp, M.S.; Shields, P.M.; Turnbull, B.J. 1995. Academic challenge in high-poverty classrooms. *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 77, p. 770–76.
- Koehler, M.; Grouws, D.A. 1992. Mathematics teaching practices and their effects. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 115–26. New York, Macmillan.
- Kulm, G.; Morris, K.; Grier, L. 1999. *Middle grade mathematics textbooks: a benchmarks-based evaluation*. Washington, DC, American Association for the Advancement of Science.

- Labinowicz, E. 1985. Learning from students: new beginnings for teaching numerical thinking. Menlo Park, CA, Addison- Wesley.
- Laborde, C. 1994. Working in small groups: a learning situation? In: Biehler, R., et al., eds. Didactics of mathematics as a scientific discipline, p. 147–58. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Leinenbach, M.; Raymond, A.M. 1996. A two-year collaborative action research study on the effects of a 'hands-on' approach to learning algebra. In: Jakubowski, E., ed. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Panama City, FL. (ERIC Document Reproduction; Service No. ED 400 178.)
- Mack, N.K. 1990. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 16–32.
- Markovits, Z.; Sowder, J. 1994. Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 25, p. 4–29.
- McKnight, C.C., et al. 1987. The underachieving curriculum. Champaign, IL, Stipes.
- Mullis, I.V.S.; Jenkins, F.; Johnson, E.G. 1994. Effective schools in mathematics: perspectives from the NAEP 1992 assessment. Washington, DC, United States Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. (Report No. 23-RR-01.)
- National Center for Education Statistics. 1996. Pursuing excellence: a study of U.S. eighth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 97-198.)
- . 1997. Pursuing excellence: a study of U.S. fourth-grade mathematics and science achievement in international context. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 97-255.)
- . 1998. Pursuing excellence: a study of U.S. twelfth-grade mathematics and science achievement in international context. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 98-049.)
- National Council of Teachers of Mathematics. 1989. Curriculum and valuation standards for school mathematics. Reston, VA, NCTM.
- Penglase, M.; Arnold, S. 1996. The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics education research journal* (Campbelltown, Australia), vol. 8, p. 58–90.
- Resnick, L.B. 1980. The role of invention in the development of mathematical competence. In: Kluwe, R.H.; Spada, H., eds. Developmental models of thinking, p. 213–44. New York, Academic Press.
- Resnick, L.B.; Omanson, S.F. 1987. Learning to understand arithmetic. In: Glaser, R., ed. Advance in instructional psychology, vol. 3, p. 41–95. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Reys, B.J.; Barger, R.H. 1994. Mental computation: issues from the United States perspective. In: Reys, R.E.; Nohda, N., eds. Computational alternatives for the twenty-first century, p. 31–47. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, B.J., et al. 1991. Developing number sense in the middle grades. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

- Rich, B.S. 1991. The effects of the use of graphing calculators on the learning of function concepts in precalculus mathematics. Doctoral dissertation, University of Iowa. Dissertation Abstracts International, vol. 52, 835A. (University Microfilms No.AAC 9112475.)
- Ruthven, K. 1990. The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational studies in mathematics* (Dordrecht, Netherlands), vol. 21, p. 431–50.
- Schmidt, W.H.; McKnight, C.C.; Raizen, S.A. 1997. *A splintered vision: an investigation of U.S. science and mathematics education*. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Secada, W.G. 1992. Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 623–60. New York, Macmillan.
- Skemp, R.R. 1978. Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 26, p. 9–15.
- Slavin, R.E. 1990. Student team learning in mathematics. In: Davidson, N., ed. *Cooperative learning in math: a handbook for teachers*, p. 69–102. Reading, MA, Addison-Wesley.
- . 1995. *Cooperative learning: theory, research, and practice*. 2nd edition. Boston, Allyn & Bacon.
- Slavit, D. 1996. Graphing calculators in a ‘hybrid’ algebra II classroom. *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education* (Montreal, Canada) vol. 16, p. 9–14.
- Smith, B.A. 1996. A meta-analysis of outcomes from the use of calculators in mathematics education. Doctoral dissertation, Texas A&M University at Commerce. Dissertation Abstracts International, vol. 58, 03.
- Sowder, J. 1992a. Estimation and number sense. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 371–89. New York, Macmillan.
- . 1992b. Making sense of numbers in school mathematics. In: Leinhardt, R.; Putnam, R.; Hattrop, R., eds. *Analysis of arithmetic for mathematics education*, p. 1–51. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowell, E.J. 1989. Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 20, p. 498–505.
- Stacey, K.; Groves, S. 1994. Calculators in primary mathematics. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Indianapolis, IN, April.
- Stigler, J.W.; Hiebert, J. 1997. Understanding and improving classroom mathematics instruction. *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 79, p. 14–21.
- Stigler, J.W., et al. 1999. *The TIMSS videotape study: methods and findings from an exploratory research project on eighth grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States*. Washington, DC, National Center for Education Statistics. (NCES 99-130.)
- Suarez, T.M., et al. 1991. Enhancing effective instructional time: a review of research. Policy brief, vol. 1, no. 2. Chapel Hill, NC, North Carolina Educational Policy Research Center.
- Suydam, M.N.; Higgins, J.L. 1977. *Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research*. Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- Thompson, P.W. 1992. Notations, conventions, and constraints: contributions of effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 123–47.
- Van Engen, H. 1949. An analysis of meaning in arithmetic. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 48, p. 395–400.
- Varelas, M.; Becker, J. 1997. Children's developing understanding of place value: semiotic aspects. *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 15, p. 265–86.
- Wearne, D.; Hiebert, J. 1988. A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 371–84.
- Webb, N.M. 1991. Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 366–89.
- Webb, N.M.; Troper, J.D.; Fall, R. 1995. Constructive activity and learning in collaborative small groups. *Journal of educational psychology* (Washington, DC), vol. 87, p. 406–423.
- Wilson, M.R.; Krapfl, C.M. 1994. The impact of graphics calculators on students' understanding of function. *Journal of computers in mathematics and science teaching* (Charlottesville, VA), vol. 13, p. 252–64.
- Wood, T. 1999. Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 30, p. 171–91.
- Wood, T.; Cobb, P.; Yackel, E. 1995. Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school. In: Steffe, L.P.; Gale, J., eds. *Constructivism in education*, p. 401–22. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Wood, T.; Sellers, P. 1996. Assessment of a problem-centered mathematics program: 3rd grade. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 337–53.
- . 1997. Deepening the analysis: longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 28, p. 163–86.
- Wood, T., et al. 1993. Rethinking elementary school mathematics: insights and issues. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), monographs, 6.
- Yackel, E.; Cobb, P.; Wood, T. 1991. Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 390–408.